Université Paris-Diderot **26 novembre 2014**
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I Section C

Devoir surveillé 2

Durée : 1 heure et 15 minutes.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les sous-espaces vectoriels suivants :

$$V = \mathrm{Vect}(\{v_1, v_2, v_3\}), \quad v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{cases} x + 2y - t = 0 \\ x + 3y - z + 2t = 0 \end{cases} \right\}.$$

(a) Donner la définition de dimension d'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^4$. Quelles valeurs peut assumer $\dim V$?

(b) Considerons la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ dans $\mathbb{R}^4$. Est-ce une famille libre de $\mathbb{R}^4$? Est-ce une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$? Est-ce une base de $\mathbb{R}^4$?

(c) Trouver une base de V. Quelle est sa dimension ?

(d) Trouver une base de W. Quelle est sa dimension ?

(e) A-t-on $V \subset W$?

Soit $V + W := \{v + w \mid v \in V \text{ et } w \in W\}$.

(f) Montrer que $V + W$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2. Soit $E = \left\{ \frac{1}{2^n} + (-1)^n \frac{1}{3^n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} \subset \mathbb{R}$.

(a) Montrer que E admet borne supérieure et inférieure.

(b) Montrer que $\frac{1}{2^n} + (-1)^n \frac{1}{3^n} > 0$ pour tout $n \geq 1$.

(c) En déduire que $\inf E \geq 0$.

(d) Montrer que $\inf E = 0$. Cette borne est-elle atteinte ?

Barème indicatif : Exercice 1 : 14 points, Exercice 2 : 7 points.